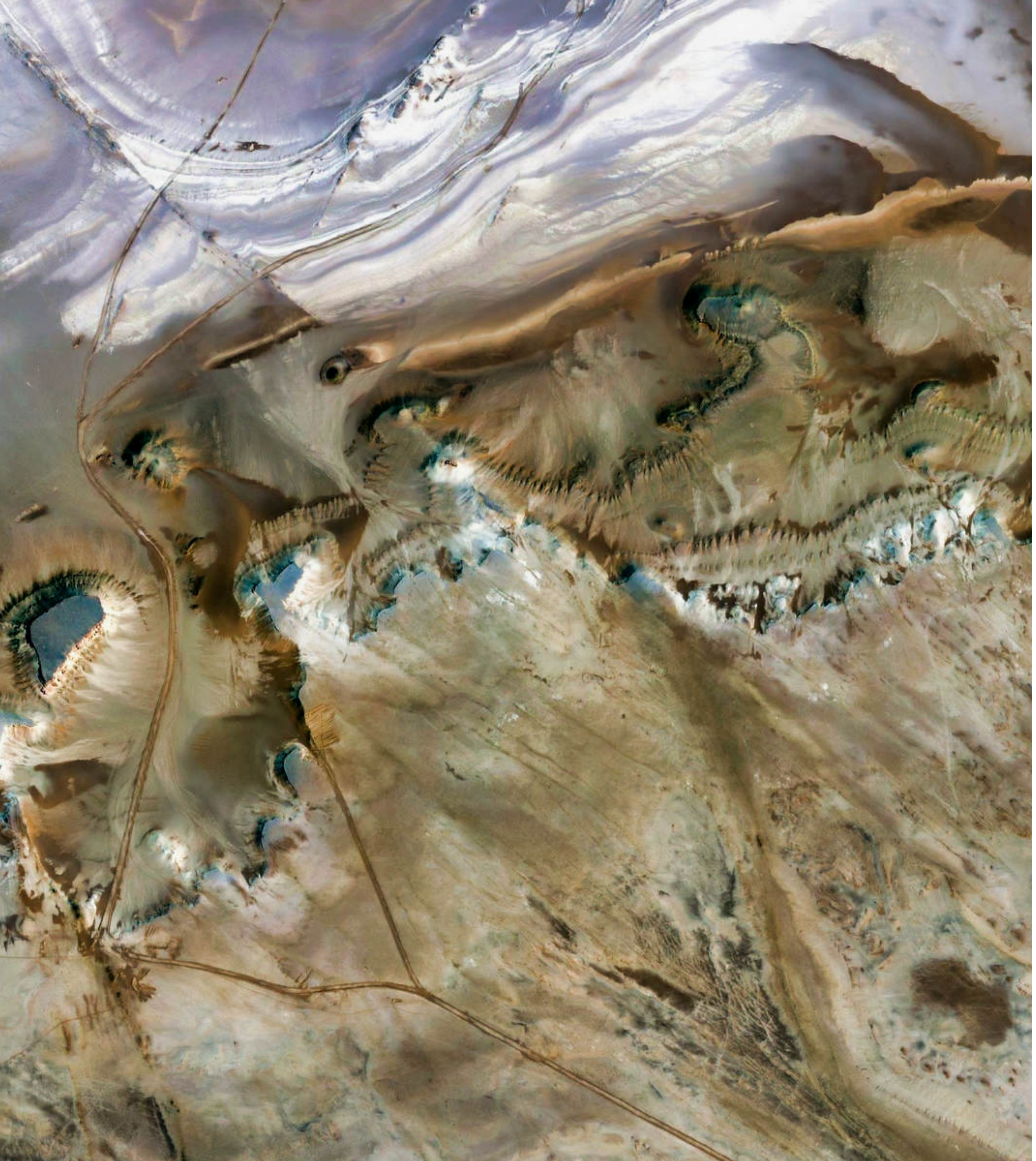


Introdução à Assimilação de Dados (MET 563-3)

Método Variacional - Parte I

Dr. Carlos Frederico Bastarz
Dr. Dirceu Luis Herdies

Programa de Pós-Graduação em Meteorologia (PGMET) do INPE

20 de Outubro de 2025

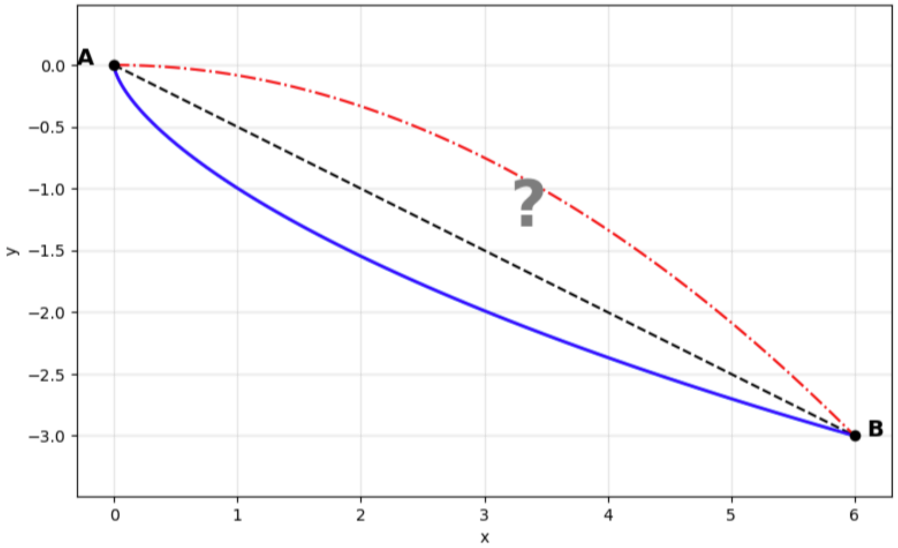
Método Variacional

Sumário

Método Variacional - Parte I

1. Cálculo variacional

- Surge no século XVII com o matemático suíço Jean Bernoulli com a proposição do seguinte problema:
    - *Entre dois pontos, sendo um mais alto do que o outro, qual é a forma da rampa pela qual um corpo desce mais rápido, apenas sob a ação da gravidade e sem atrito?*



Método Variacional - Parte I

1. Cálculo variacional

- 🎲 Este problema ficou conhecido como o **Problema da Braquistócrona** (a curva descrita pela trajetória do corpo) e emprega a equação de Euler-Lagrange para a sua solução
- 💡 Inseriu uma nova ideia na matemática: ao invés de se buscar um número que minimiza uma expressão, busca-se uma função (que descreve a forma da curva)
- ⏳ O tempo total de descida do corpo pode ser descrito como uma integral que depende dessa função e o cálculo variacional permite determinar qual função faz essa integral ser mínima
- 👉 A essência do cálculo variacional é encontrar uma função que minimiza ou maximiza um funcional 🔸, ou seja, uma expressão que associa um número a cada função possível

🔸 Funcional é uma generalização do conceito de função e é um número que depende de uma função

Método Variacional - Parte I

1. Cálculo variacional

Um exemplo simples

- Entre todos os caminhos $y(x)$ que ligam os pontos de coordenadas (x_1, y_1) e (x_2, y_2), encontre aquele que minimiza o comprimento da curva
  1. Para resolver este problema, primeiro temos que definir o nosso funcional:
     - O comprimento L da curva é $L[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y\prime)^2} dx$, com $y\prime = \frac{dy}{dx}$
  2. Definido o funcional $L[y]$, aplicamos a equação de Euler-Lagrange:
     - $F(x, y, y\prime) = \sqrt{1 + (y\prime)^2}$
     - A equação de Euler-Lagrange é $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y\prime}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$
     - Como F não depende diretamente de y, o segundo termo $\frac{\partial F}{\partial y}$ é zero: $\frac{d}{dx}\left(\frac{y\prime}{\sqrt{1+(y\prime)^2}}\right) = 0$
  3. Se a derivada é nula, então temos uma constante $\frac{y\prime}{\sqrt{1+(y\prime)^2}} = C$, o que implica que $y\prime$ é uma constante e que portanto, $y(x)$ é linear, ou seja, $y(x) = ax + b$
  4. Logo, a função $y(x)$ que minimiza o comprimento da curva dado pelo funcional $L[y]$ é uma reta

Método Variacional - Parte I

1. Cálculo variacional

O Problema da braquistócrona

- *Entre dois pontos, sendo um mais alto do que o outro, qual é a forma da rampa pela qual um corpo desce mais rápido, apenas sob a ação da gravidade e sem atrito?*

0:00 / 0:06

0:00 0:07

Método Variacional - Parte I

1. Cálculo variacional

O Problema da braquistócrona

- O tempo de descida do corpo sobre a **curva de tempo mais curto**, considera a conversão de energia potencial em energia cinética: $v = \sqrt{2gy}$
- Onde:
    - y é a altura medida do ponto mais alto
    - g é a aceleração da gravidade
- O tempo de deslocamento infinitesimal é $dt = \frac{ds}{v}$, ao longo do comprimento de arco ds dado por:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

- O tempo total de descida, é dado pela interal (do ponto A ao ponto B):

$$T = \int_A^B \frac{\sqrt{1 + (y\prime)^2}}{\sqrt{2gy}} dx$$

    - Onde:
        - $y\prime = \frac{dy}{dx}$ é a variação da altura

Método Variacional - Parte I

1. Cálculo variacional

O Problema da braquistócrona

- O problema do cálculo variacional é encontrar a função $y(x)$ que minimiza a integral funcional:

$$T[y] = \int F(y, y\prime)dx$$

- Onde:
  - $F(y, y\prime) = \frac{\sqrt{1+(y\prime)^2}}{\sqrt{2gy}}$

- Aplica-se a equação de Euler-Lagrange $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y\prime}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$, a partir da qual obtém-se uma equação diferencial cuja solução é a curva cicloide:
- Forma paramétrica da ciclóide:

$$\begin{cases} x = R(\theta - \sin\theta) \\ y = R(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

  - Onde:
    - R é o raio do círculo que gera a ciclóide
    - θ é o ângulo da curva

Método Variacional - Parte I

2. Revisão de Álgebra Linear (Matrizes)

- Matriz é um conjunto retangular de informações arranjado em linhas e colunas
- Os itens individuais de uma matriz são chamados de elementos
- Por exemplo, uma matriz retangular $\mathbf{A}_{m\times n}$, com m linhas e n colunas:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Método Variacional - Parte I

2. Revisão de Álgebra Linear (Matrizes)

- Matrizes de mesmo tamanho podem ser adicionadas ou subtraídas elemento por elemento
- Multiplicação de matrizes é possível desde que o número de colunas da primeira matriz, seja igual ao número de linhas da segunda matriz
- Uma matriz com m linhas é n colunas é chamada matriz $m \times n$, onde m e n são chamados de dimensões da matriz
- Uma matriz 3×2:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ -3 & -4 \\ 0 & 5,87 \end{bmatrix}$$

Método Variacional - Parte I

2. Revisão de Álgebra Linear (Matrizes)

- Matrizes com uma única linha são chamadas de **vetor linha** e matrizes com uma única coluna, são chamadas de **vetor coluna**
- Matrizes com o mesmo número de linhas e colunas, são chamadas de matrizes quadradas
- Exemplos:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -10 & -9,1 & 0 \\ 45 & 0,01 & -0,8 & 3 \\ -11 & -90 & 11 & -3 \\ 3,14 & 11,1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Método Variacional - Parte I

2. Revisão de Álgebra Linear (Matrizes)

- Os subscritos, normalmente representados por i, j, correspondem à posição de um dado elemento dentro da matriz
- Por exemplo, o elemento $\mathbf{A}_{3,3} = 11$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -10 & -9,1 & 0 \\ 45 & 0,01 & -0,8 & 3 \\ -11 & -90 & 11 & -3 \\ 3,14 & 11,1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Método Variacional - Parte I

2. Revisão de Álgebra Linear (Matrizes)

Adição de matrizes

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn}b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 9 & 10 \\ -3 & -4 \\ 0 & 5,87 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 7 \\ 9 & -3,1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9+0 & 10-3 \\ -3+4 & -4+7 \\ 0+9 & 5,87-3,1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 1 & 3 \\ 9 & 2,77 \end{bmatrix}$$

Método Variacional - Parte I

2. Revisão de Álgebra Linear (Matrizes)

Transposição de matrizes

- A transposição de uma matriz representa a reflexão em relação à sua diagonal principal, que se inicia no canto superior esquerdo
- Se $\mathbf{A}$ é uma matriz $m \times n$, então a sua transposta é a $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ de dimensões $n \times m$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Método Variacional - Parte I

2. Revisão de Álgebra Linear (Matrizes)

Transposição de matrizes

- Propriedades:

$$(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$$

$$(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$$

$$\det(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) = \det(\mathbf{A})$$

$$(c\mathbf{A})^{\mathrm{T}} = c\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$$

- **Nota:** $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são vetores coluna e $\cdot$ é o produto escalar

Método Variacional - Parte I

2. Revisão de Álgebra Linear (Matrizes)

Multiplicação de matrizes

- Multiplicação entre duas matrizes só é possível se o número de colunas da matriz à esquerda for igual ao número de linhas da matriz à direita:

$$[\mathbf{AB}]_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \cdots + a_{i,n}b_{n,j} = \sum_{r=1}^{n} a_{i,r}b_{r,j}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mp} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

$$c_{ij} = [a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}] \cdot \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Método Variacional - Parte I

2. Revisão de Álgebra Linear (Matrizes)

Multiplicação de matrizes

- Propriedades:

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$$

$$\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BA})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}, \quad (\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$$

$$\lambda(\mathbf{AB}) = (\lambda\mathbf{A})\mathbf{B} = A(\lambda\mathbf{B})$$

$$(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$$

- **Nota:** λ é um escalar

Método Variacional - Parte I

2. Revisão de Álgebra Linear (Matrizes)

Tipos de matrizes

- Diagonal:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

- Triangular inferior:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- Triangular superior:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{a23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

- Identidade:

$$\mathbf{I}_1 = [1], \quad \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \ldots \quad , \quad \mathbf{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Método Variacional - Parte I

2. Revisão de Álgebra Linear (Matrizes)

Tipos de matrizes

- Simétrica ($\mathbf{A}$ deve ser quadrada):

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 1 & -10 & -9,1 & 0 \\ 45 & 0,01 & -0.8 & 3 \\ -11 & -90 & 11 & -3 \\ 3,14 & 11.1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

- Inversível (se $\det(\mathbf{A}) = 0$, $\mathbf{A}$ não é inversível):

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \mathrm{adj}(\mathbf{A})$$

Onde:

$$\mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \mathrm{Cof}(\mathbf{A})^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Método Variacional - Parte I

2. Revisão de Álgebra Linear (Matrizes)

🎲 Exercícios

1. Adição de matrizes 3 x 3
   - Sejam $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, calcule $\mathbf{A} + \mathbf{B}$

2. Multiplicação de matrizes 3 x 3
   - Sejam $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, calcule $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$

Método Variacional - Parte I

2. Revisão de Álgebra Linear (Matrizes)

🎲 Exercícios

3. Determinante de matriz 3 x 3
   - Calcule o determinante de $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

4. Inversa de matriz 2 x 2
   - Seja $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, enconte $\mathbf{D}^{-1}$, se existir

Método Variacional - Parte I

2. Revisão de Álgebra Linear (Matrizes)

〓 Respostas

1. Adição de matrizes 3 x 3
   - Sejam $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, calcule $\mathbf{A} + \mathbf{B}$
   - 👉 $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2+1 & 0+2 & 1+0 \\ 1+0 & -1+3 & 3-1 \\ 0+5 & 4+1 & 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

Método Variacional - Parte I

2. Revisão de Álgebra Linear (Matrizes)

〓 Respostas

2. Multiplicação de matrizes 3 x 3
    - Sejam $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, calcule $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$
    - 👉

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 5 & 2 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 5 & 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 5 & 0 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 16 & 2 & 7 \\ 10 & 14 & 0 \end{pmatrix}$$

Método Variacional - Parte I

2. Revisão de Álgebra Linear (Matrizes)

Respostas

3. Determinante de matriz 3 x 3

- Calcule o determinante [◆] de $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$
- 👉 $\det(\mathbf{C}) = \{[2 \cdot 3 \cdot (-1)] + [0 \cdot 2 \cdot 0] + [1 \cdot (-1) \cdot 4]\} - \{[0 \cdot 3 \cdot 1] + [4 \cdot 2 \cdot 2] + [(-1) \cdot (-1) \cdot 0]\}$
- 👉 $\det(\mathbf{C}) = -10 - 16$
- 👉 $\det(\mathbf{C}) = -26$

[◆] Utilizando a regra de Sarrus

Método Variacional - Parte I

2. Revisão de Álgebra Linear (Matrizes)

Respostas

4. Inversa de matriz 2 x 2
    - Seja $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, enconte $\mathbf{D}^{-1}$, se existir

    - 👉 $\det(\mathbf{D}) = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = 10 - 3 = 7$
    - 👉 $\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{D})} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$
    - 👉 $\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$
    - 👉 $\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,71 & -0,14 \\ -0,43 & 0,29 \end{pmatrix}$

🤔 Dúvidas

🔗 https://cfbastarz.github.io/met563-3/
🐙 https://github.com/cfbastarz/MET563-3
📧 carlos.bastarz@inpe.br